НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

«На правах рукопису»
УДК ______________

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри
__________ Дудкін М.Є
“14” травня_2018_р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Пряма спектральна задача у двовимірній проблемі моментів»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-61м
Єфімова Олександра Олександрівна _____________

Керівник:
завідувач кафедри диференціальних рівнянь,
доктор фіз.-мат. наук, професор
Дудкін М.Є. _____________

Рецензент:
доцент, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Дюженкова О.Ю. _____________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________
(підпис)

Київ – 2018 року

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ Дудкін М.Є
«___»_____________2018 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Єфімовій Олександрі Олександрівні

1. Тема дисертації «Пряма спектральна задача у двовимірній проблемі моментів»,
науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Дудкін М.Є,
затверджені наказом по університету від «___»_________ 2018 р. №_____

2. Термін подання студентом дисертації 14.05.2018

3. Об'єкт дослідження система різницевих рівнянь.

4. Предмет дослідження пряма спектральна задача у двовимірній проблемі моментів.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1. Ознайомитися з літературою, в якій досліджувалися двовимірна проблема моментів, пряма та обернена спектральні задачі.
2. Розв'язати пряму спектральну задачу відносно двовимірної проблеми моментів.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 10 слайдів.

7. Дата видачі завдання 5.02.2018

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою, в якій досліджувалися двовимірна проблема моментів, пряма та обернена спектральні задачі.	5.02.2018 – 5.03.2018	виконала
2.	Розв’язання прямої спектральної задачі відносно двовимірної проблеми моментів.	5.03.2018 – 23.04.2018	виконала
3.	Оформлення роботи	23.04.2018 – 14.05.2018	виконала

Студент ______________ __Єфімова О.О.______
(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації ______________ __Дудкін М.Є.______
(підпис) (ініціали, прізвище)

Реферат

Магістерська дисертація: 51 сторінки, 10 слайдів для проектора

В магістерській дисертації досліджуються блочні тридіагональні матриці типу Якобі, що відповідають дійсній двовимірній проблемі моментів.

Метою роботи є розв'язання прямої спектральної задачі, а саме за даними матрицями побудувати систему різницевих рівнянь, розв'язати її. А саме, відновити міру за заданими матрицями в сенсі рівності Парсеваля.

Ключові слова: матриці типу Якобі, двовимірна проблема моментів, пряма спектральна задача.

Реферат

Магистерская диссертация: 51 страница, 10 слайдов для проектора

В магистерской диссертации исследуются блочные трехдиагональные матрицы типа Якоби, которые соответствуют действительной двухмерной проблеме моментов.

Целью работы является решению прямой спектральной задачи, а именно по данным матрицам построить систему разностных уравнений, решить ее. Точнее, восстановить меру по данным матрицам в смысле равенств Парсеваля.

Ключевые слова: матрицы типа Якоби, двухмерная проблема моментов, прямая спектральная задача.

Abstract

Master’s thesis: 51 pages, 10 illustrations

In my masters thesis the block three-diagonal Jacobi-type matrix, which correspond to valid two-dimensional moment problem was investigated.

The aim of the work is to solve a direct spectral problem, namely, to build a system of difference equations from these matrices and to solve it. More precisely, to restore the measure of these matrices in the sense of Parseval's equality.

Key words: Jacobi-type matrices, two-dimensional moment problem, direct spectral problem.

Зміст

ВСТУП

Робота присвячена продовженюю досліджень блочних тридіагональних матриць типу Якобі, що відповідають дійсній двовимірній проблемі моментів. Такі матриці виникли як узагальнення класичних матриць Якобі, які пов'язані із проблемою моментів Габмургера.

Результати, які стосуються блочних матриць Якобі, можна використовувати у задачах механіки стосовних зв'язних маятників. Дослідження з цих питань ведуться в Інституті математики НАН України, Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка, Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна.

В цій роботі розглядається пряма спектральна задача у двовимірній проблемі моментів.

Основним здобутком роботи є процедура розв'язання системи різницевих рівнянь побудованих за заданими матрицями.

Розділ 1. Двовимірні проблеми моментів

В цьому розділі наведені детальні розв'язки степеневої двовимірної проблеми моментів та двовивірної сильної проблеми моментів. Наведене є частинними випадками загальних тверджень. Розв'язки записані за допомогою рівності Парсеваля, використовуючи розклад за відповідними узагальненими власними векторами.

1.1 Двовимірні проблеми моментів

Нехай $\mathcal{H}$ сепарабельний гільбертовий простір, і нехай, A і B коммутуючі самоспряжені оператори, визначені на Dom(A) і Dom(B) в H. Розглянемо оснащення H:

$$\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \supset D, \tag{1.1}$$

де $\mathcal{H}_+$ гільбертовий простір топологічно і квазіядерно вкладений в $\mathcal{H}$ (топологічно означає цільно і неперервно; квазіядерно означає, що оператор вкладення є типа Гільберта-Шмідта); $\mathcal{H}_-$ є дуальним до $\mathcal{H}_+$ відносно простору $\mathcal{H}$; D лінійний топологічний простір, топологічно вкладений в $\mathcal{H}_+$.

Оператори A і B називаються стандартно пов'язаними з (1), якщо $D \subset Dom(A), D \subset Dom(B)$ і звуження $A \restriction D, B \restriction D$ діють з D в $\mathcal{H}_+$ неперервно.

Нагадаємо, що вектор $\Omega \in D$ називається строго циклічним для операторів A і B, якщо для будь-яких $p, q \in \mathbb{N}$ виконується $\Omega \in Dom(A^p) \cap Dom(B^q), A^p B^q \Omega \in D$ і множина всіх цих векторів і $\Omega, p, q = \mathbb{N}_0$, є тотальною в просторі H_+ (і, отже, також в H).

Якщо припустити, що строгий циклічний вектор існує, то можна сформулювати спрощений варіант проекційної спектральної теореми.

Теорема 1.1.1 *Для комутуючих самоспряжених операторів A і B із строгим циклічним вектором в сепарабельному гільбертовому просторі H, існує невід'ємна скінченна борелівська міра* $d\rho(x, y)$, *задана таким чином, що для* ρ-*майже кожної точки* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *існує узагальнений спільний власний вектор* $\xi_{x,y} \in H_-$, *тобто,*

$$(\xi_{x,y}, Af)_H = x(\xi_{x,y}, f)_H,\ (\xi_{x,y}, Bf)_H = y(\xi_{x,y}, f)_H,\ f\ \in D;\ \xi_{x,y} \neq 0 \qquad (1.2)$$

Відповідне перетворення Фур'є Fб що діє за правилом:

$$H \supset H_+ \ni f \mapsto (Ff)(x,y) = \hat{f}(x,y) = \left(f, \xi_{x,y}\right)_H \in L_2\left(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)\right) \coloneqq L_2 \qquad (1.3)$$

є унітарним оператором (після замикання), який діє з H в L_2.

Нагадаємо також, що для самоспряженого оператора T, визначеного на Dom(T) в H, вектор $f\ \in\ \bigcap_{n=0}^{\infty} Dom(T^n)$ називається квазіаналітичним, якщо клас $C\{m_n\}$, в нашому випадку $m_n = \sqrt{\|T^n f\|_H}$, є квазіаналітичним (нагадаємо, що цей клас функцій на $[a,b]\ \subset\ \mathbb{R}$ визначається так:

$C\{m_n\} =\ \left\{f \in C^{\infty}([a,b])\ \exists K = K_f > 0,\ \left|f^{(n)}(t)\right| \leq K^n m_n,\ t \in [a,b], n \in \mathbb{N}_0\right\}$, або

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\|T^n f\|_H}} =\ \infty \qquad (1.4)$$

Ми використовуємо умову квазіаналітичності, яка отримана за допомогою критерію самоспряженості і комутативності.

Теорема 1.1.2 *Замкнений ермітів оператор T в гільбертовому просторі H є самоспряженим тоді і тільки тоді, якщо існує для нього повна в H множина квазіаналітичних векторів.*

Наступна теорема дає важливий критерій для двох операторів, які є істотно самоспряженими і комутуючими після замикання.

Теорема 1.1.3 *Нехай A і B – два ермітових оператори визначені на Dom(A) і Dom(B) в гільбертовому просторі H і на щільній в H лінійній області D визначені оператори* $A, B, A^2, AB, BA,$ і B^2 та $ABf = BAf$ *для всіх* $f \in D$.

Якщо звуження $A^2 +\ B^2$ *на D є суттєво самоспряженим оператором, то замикання A і B є самоспряженими операторами, які комутують в строгому резольвентному сенсі.*

1.2 Розв’язання двовимірної степеневої проблеми моментів

Двовимірна дійсна степенева проблема моментів полягає в знаходженні умов для заданої двоіндексної послідовності $\{s_{m,n}\}, m, n \in \mathbb{N}_0$, дійсних чисел так, щоб існувала позитивна міра Бореля $d\rho(x,y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}^2$, для якої виконувалася б рівність:

$$s_{m,n} = \int_{\mathbb{R}^2} x^m y^n \, d\rho(x,y), \; m,n \in \mathbb{N}_0 \qquad (1.5)$$

Теорема 1.4 *Для існування зображення (1.5) для заданої послідовності дійсних чисел* $\{s_{m.n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ *має місце додатна визначеність, тобто*

$$\sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \overline{f_{m.n}} s_{j+m,k+n} \geq 0 \qquad (1.6)$$

для всіх фінітних послідовностей комплексних чисел $(f_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, f_{j,k} \in \mathbb{C}$.

Представлення (1.5) для заданої послідовності дійсних чисел $\{s_{m.n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ *існує і єдине, якщо воно додатно визначене і*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{S_{4p-4k,4k}}}} = \infty. \qquad (1.7)$$

Нагадаємо, що умова (1.6) є необхідною для представлення (1.5). Умови визначені в (1.6) і (1.7) разом гарантують не тільки існування але і єдиність представлення (1.5) для даної послідовності $\{s_{m.n}\}_{m,n=0}^{\infty}$.

1.2.1 Доведення зображення

Необхідність умови (1.6) доводиться просто. Якщо послідовність $\{s_{m.n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ має представлення (1.5), то для довільної скінченної послідовності $f = (f_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}, f_{m,n} \in \mathbb{C}$ виконується:

$$\sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{f}_{m,n} s_{j+m,k+n} = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{m,n} x^m y^n \right|^2 d\rho(x,y) \geq 0. \qquad (1.8)$$

Позначимо через l лінійний простір $\mathbb{C}^{\infty}$ послідовностей $f = (f_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}, f_{m,n} \in \mathbb{C}$, і через l_{fin} його лінійну множину. Що складається з скінченних послідовностей $f = (f_{m,n})_{m.n=0}^{\infty}$, тобто послідовностей, де $f_{m,n} \neq 0$ тільки для скінченної кількості індексів n і m.

Розглянемо лінійні оператори l_{fin}:

$$(J_A f)_{j,k} = f_{j-1,k}, (J_B f)_{j,k} = f_{j,k-1}, j, k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.9}$$

де завжди $f_{j,-1} = f_{-1,k} \equiv 0$. Оператори J_A і J_B є операторами типу «народження». Для δ-послідовностей маємо

$$J_A \delta_{j,k} = \delta_{j+1,k}, J_B \delta_{j,k} = \delta_{j,k+1} \tag{1.10}$$

Оператори J_A і J_B симетричні на фінітних векторах відносно (квазі)скалярного добутку

$$(f, g)_s = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n}, f, g \in l_{fin}. \tag{1.11}$$

Дійсно,

$$(J_A f, g)_S = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} (J_A f)_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j-1,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n}$$

$$= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n}$$

$$= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{g}_{m-1,n} s_{j+m,k+n}$$

$$= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \overline{(J_A g)}_{m,n} s_{j+m,k+n} = (f, J_A g)_S.$$

$$(J_B f, g)_S = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} (J_B f)_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n} = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k-1} \bar{g}_{m,n} s_{j+m,k+n}$$

$$= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{g}_{m,n} s_{j+n+1,k+m}$$

$$= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \bar{g}_{m-1,n} s_{j+n,k+m}$$

$$= \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k} \overline{(J_B g)}_{m,n} s_{j+m,k+n} = (f, J_B g)_S.$$

Оператор J_A комутує за оператором J_B на l_{fin}:

$$(J_B J_A f)_{j,k} = f_{j-1,k-1} = (J_B J_A f)_{j,k}$$

Нехай S гільбертів простір, отриманий як фактор-простір

$$\dot{l}_{fin} = l_{fin} / \{h \in l_{fin} | (h,h)_S = 0\}.$$

Елемент f з S відповідає елементу $\dot{f}$ з простору еквівалентних елементів $\dot{l}_{fin}$. Отже, оператори $\dot{J}_A$ і $\dot{J}_B$ коректно визначені в S. Аналогічно до цього випадку ми отримуємо

$$\dot{J}_A \dot{f} = (J_A f), f \in Dom(\dot{J}_A) = \dot{l}_{fin};\ \dot{J}_B \dot{f} = (J_B f), f \in Dom(\dot{J}_B) = \dot{l}_{fin} \quad (1.12)$$

Позначимо для наступних міркувань A і B замикання $\sim \dot{J}_A$ і $\dot{J}_B$ в S.

Для простоти будемо вважати, що послідовність $\{s_{m,n}\}$ є невиродженою, тобто якщо $(f,f)_s = 0$ для $f \in l_{fin}$, тоді $f = 0$, і тепер $\dot{f} = f$ і $\tilde{\dot{J}}_A = A$ і $\tilde{\dot{J}}_A = B$.

Припустимо також, що оператори A і B самоспряжені. Пізніше ми доведемо, що A і B самоспряжені і комутуючі у строгому резольвентному сенсі за умови (1.7).

Побудуємо оснащення простору S:

$$(l_2(p))_{-,S} \supset S \supset l_2(p) \supset l_{fin}, \quad (1.13)$$

де $l_2(p)$ є зваженим l_2-простором з вагою $p = (p_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}, p_n \geq 1$. Норма в $l_2(p)$ визначається формулою

$$\|f\|_{l_2(p)}^2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left|f_{m,n}\right|^2 p_{m,n}$$

де $(l_2(p))_{-,s} = H_-$ є від'ємним простором відносно додатного простору $l_2(p) = H_+$ і нульового простору $S = H$.

Лема 1.2.2 *Для простору S існує достатньо швидко зростаюча послідовність $p_{m,n}$, така, що вкладення $l_2(p) \hookrightarrow S$ є квазіядерним.*

Доведення. Нерівність (1.6) також означає, що мульти-матриця $(K_{j,k;m,n})_{j,k,m,n=0}^{\infty}$ з коефіцієнтами $K_{j,k,m,n} = s_{j+m,k+n}$ є невід'ємно визначеною і, отже,

$$\left|s_{j+m,k+n}\right|^2 = \left|K_{j+m,k+n}\right|^2 \leq K_{j,k;j,k} K_{m,n;m,n} = s_{j+k,j+k} s_{n+m,n+m}, j,k,m,n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.14}$$

Нехай вага $q = (q_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, q_{j,k} \geq 1$, така, що $\sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k,j+k}\, q_{j,k}^{-1} < \infty$. Далі, з (1.14) отримуємо, що

$$\|f\|_S^2 = \sum_{j,k,m,n=0}^{\infty} f_{j,k}\, \bar{f}_{m,n} s_{j+m,k+n} \leq \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{s_{j+k,j+k}}{q_{j,k}}\right) \|f\|_{l_2(q)}^2, f \in l_{fin}.$$

Таким чином, $l_2(q) \hookrightarrow S$ топологічний. І, якщо $\sum_{j,k=0}^{\infty} q_{j,k}\, p_{j,k}^{-1} < \infty$, тоді $l_2(p) \hookrightarrow l_2(q)$ квазіядерний. Відображення $l_2(p) \hookrightarrow S$ квазіядерних і топологічних вкладень є також квазіядерним.

На наступному кроці ми викоритсаємо оснащення (1.13) для побудови узагальнених власних векторів. Внутрішня структура простору $(l_2(p))_{-,S}$, складна, тому що складна структура S. Це є причиною ввести нове оснащення

$$l = (l_{f\imath n}) \supset (\acute{l}_2(p^{-1})) \supset l_2 \supset l_2(p) \supset l_{fin}, \tag{15}$$

коли $l_2(p^{-1}), p^{-1} = (p_{m,n}^{-1})_{m,n=0}^{\infty}$ є від'ємним простором завдяки додатному простору $l_2(p)$ і нульовому простору l_2. Ланцюги (1.13) і (1.15) діють в додатному просторі $l_2(p)$. Наступна загальна лема встановлює, що простір $(l_2(p))_{-,S}$ є ізометричним до простору $l_2(p^{-1})$.

Лема 1.2.3 *Розглянемо два оснащення*

$$K_- \supset K \supset K_+, F_- \supset F \supset F_+ = K_+, \qquad (1.16)$$

з однаковими позитивними просторами. Тоді існує унітарний оператор $U: K_- \to \mathcal{F}_-, \cup K_- = \mathcal{F}_-$ *такий, що*

$$(U\xi, f)_{\mathcal{F}} = (\xi, f)_K, \xi \in K_-, f \in K_+ = F_+. \qquad (1.17)$$

Цей оператор може бути отриманий наступним чином: $U = \mathbb{I}_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbb{I}_{\mathcal{K}}$, *де* $\mathbb{I}_{\mathcal{F}}$ *і* $\mathbb{I}_{\mathcal{K}}$ *– стандартні канонічні ізоморфізми Березанського у відповідних ланцюгах* $(\mathbb{I}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_-, \mathbb{I}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_- = \mathcal{K}_+)$.

Роль оснащень (1.16) будуть грати (1.13) і (1.15) в подальшому.

Очевидно, що оператори A і B стандартно пов'язані із ланцюгом (1.15), і вектор $\Omega = \delta_{0,0} \in l_{fin}$ є строгим циклічним для операторів A і B, тому ми можемо застосувати Теорему 1.1.1. Нехай $\xi_{x,y} \in (l_2(p))_{-,S}$ є узагальненим власним вектором операторів A і B. Отже, в цьому випадку, за Теоремою 1.1.1 ми маємо:

$$(\xi_{x,y}, Af)_S = x(\xi_{x,y}, f)_S, (\xi_{x,y}, Bf)_S = y(\xi_{x,y}, f)_S, (x,y) \in \mathbb{R}^2, f \in l_{fin}. \quad (1.18)$$

Позначимо

$$P(x,y) = U\xi_{x,y} \in l_2(p^{-1}) \subset l, P(x,y) = (P_{m,n}(x,y))_{m,n=0}^{\infty}, P_{m,n}(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Використовуючи (1.17), ми можемо переписати (1.18) у вигляді

$$(P(x,y), Af)_{l_2} = x(P(x,y), f)_{l_2}, (P(x,y), Bf)_{l_2} = y(P(x,y), f)_{l_2}, (x,y) \in \mathbb{R}^2, f \in l_{fin}. \qquad (1.19)$$

Відповідне перетворення Фур'є має наступний вигляд:

$$S \supset l_{fin} \ni f \to (Ff)(x,y) = \hat{f}(x,y) = \big(f, P(x,y)\big)_{l_2} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)) \; (20)$$

Підрахуємо $P(x,y)$. Оператор A визначається за правилом (1.9) і тому (1.19) дає

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} xP_{m,n}(x,y)\bar{f}_{m,n} = x(P(x,y), f)_{l_2} = (P(x,y), Af)_{l_2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} P_{m+1,n}(x,y)\bar{f}_{m,n}, \forall f \in l_{fin}. \qquad (1.21)$$

Аналогічно, використовуючи (1.9) і (1.19), ми маємо

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} yP_{m,n}(x,y)\bar{f}_{m,n} = y(P(x,y),f)_{l_2} = (P(x,y),Bf)_{l_2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} P_{m,n+1}(x,y)\bar{f}_{m,n}, \forall f \in l_{fin}. \qquad (1.22)$$

Отже, остаточно ми маємо

$$xP_{m,n}(x,y) = P_{m+1,n}(x,y), yP_{m,n}(x,y) = P_{m,n+1}(x,y), m,n \in \mathbb{N}_0.$$

Без втрати загальності ми можемо покласти $P_{0,0}(x,y) = 1, (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Тоді останні дві рівності дають

$$P_{m,n}(x,y) = x^m y^n, m,n \in \mathbb{N}_0. \qquad (1.23)$$

Таким чином, перетворення Фур'є (1.20) має вигляд

$$S \supset l_{fin} \ni f \to (Ff)(x,y) = \hat{f}(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{m,n}\, x^m y^n \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)), \qquad (1.24)$$

і

$$(f,g)_S = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}d\rho(x,y), f,g \in l_{fin}. \qquad (1.25)$$

Щоб побудувати перетворення Фур'є (20) і використати формули (1.21)-(1.25) є ще необхідним перевірити, що для наших операторів A і B вектор $\Omega = \delta_{0,0} \in l_{fin}$ є строго циклічним у розумінні оснащення (1.13). Але це, очевидно, вірно, тому що завдяки (1.10) маємо: $A^p B^q \Omega = J_A^p J_B^q \delta_{0,0} = \delta_{p,q}$.

Рівність Парсеваля (1.25) відразу ж призводить до представлення (1.5) згідно з (1.23), (1.24): $\hat{\delta}_{m,n} = x^m y^n$ і $\hat{\delta}_{0,0} = 1$; з (1.11) ми отримаємо

$$s_{m,n} = (\delta_{m,n}, \delta_{0,0})_S = (\hat{\delta}_{m,n}, \hat{\delta}_{0,0})_{L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))} = \int_{\mathbb{R}^2} x^m y^n d\rho(x,y)\,, m,n \in \mathbb{N}_0. \qquad (1.26)$$

1.2.2 Єдиність зображення

Однозначність представлення (1.5) випливає з самоспряженості і комутативності операторів A і B. Отже, для завершення доведення Теореми треба тільки перевірити, що умова (1.7) забезпечує самоспряженість та комутативність A і B. На наступному кроці ми використаємо Теорему 1.1.3. Але для цього нам потрібно тільки перевірити, чи має оператор $A^2 + B^2$ щільну множину $\mathcal{D}$ квазіаналітичних векторів.

Завдяки (1.9), оператор $\mathcal{A} = A^2 + B^2$ діє на $\delta_{m,n} \in \mathcal{D}$ таким чином:

$$\mathcal{A}\delta_{m,n} = (A^2 + B^2)\delta_{m,n} = \delta_{m+2,n} + \delta_{m,n+2} \tag{1.27}$$

Очевидно $\mathcal{A} \geq 0$. Для $p \geq 1$ ми маємо

$$\mathcal{A}^p \delta_{m,n} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \delta_{m+2p-k,n+2k}.$$

Згідно з (11) норма $\|f\|_S = \sqrt{(f,f)_S}$ в S. Отже, $\forall \delta_{m,n} \in \mathcal{D}$ ми отримуємо

$$\left\|\mathcal{A}^p \delta_{m,n}\right\|_S = \left\|\sum_{k=0}^{p} C_p^k \delta_{m+2p-k,n+2k}\right\|_S \leq \sum C_p^k \left\|\delta_{m+2p-k,n+2k}\right\| = \sum C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-4-2k,2m+4p-2k}}. \tag{1.28}$$

Оскільки

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\left\|\mathcal{A}^p \delta_{m,n}\right\|}} \geq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-4k,2n+4k}}}} = \infty, m, n \in \mathbb{N}_0$$

то ми довели, що квазіаналітичність класу $C\{\left\|\mathcal{A}^p \delta_{m,n}\right\|\}$, випливає з квазіаналітичності класу $C\{\sqrt{\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{2m+4p-4k,2n+4k}}}\}$ через властивості квазіаналітичності. Це еквівалентно квазіаналітичності класу $C\{\sqrt{\sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{4p-4k,4k}}}\}$. Але ця квазіаналітичність дає умову (1.7), беручи до уваги (1.28). Це завершує доведення теореми 1.2.1.

Розділ 2. Обернена спектральна задача

Наведемо розгорнуте доведення оберненої спектральної задачі для блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів.

2.1 Ортогоналізація двоіндексної послідовності

Нехай $d\rho(x,y)$ – імовірнісна міра Бореля з компактним носієм на дійсній площині $\mathbb{R}^2$ і $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ – простір інтегровних з квадратом функцій, визначених на $\mathbb{R}^2$. Ми вважаємо, що носій цієї міри – це компактна множина, яка містить відкриту підмножину. Тоді функції $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto x^m y^n, m,n \in \mathbb{N}_0$, є лінійно незалежні і утворюють щільну множину в L_2.

Розглянемо оператори множення

$$\hat{A}f(x,y) = xf(x,y), \hat{B}f(x,y) = yf(x,y)$$

в просторі L_2. Очевидно, що ці оператори обмежені і самоспряжені. Для знаходження матриць типу Якобі операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ ми вибираємо деякий порядок ортогоналізації в L_2 для сімейства функцій:

$$\{x^m y^n\}, m,n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.1}$$

Використаємо лінійний порядок для ортогоналізації у відповідності із процедурою Шмідта.

Отже, ми отримуємо:

$$x^0y^0;\ x^0y^1, x^1y^0;\ \ x^0y^2, x^1y^1, x^2y^0; \dots;\ x^0y^n, x^1y^{n-1}, \dots, x^ny^0; \dots. \tag{2.2}$$

Враховуючи послідовність функцій (2.2), ми ортогоналізуємо її відповідно до процедури Шмідта. В результаті ми отримаємо ортонормовану систему поліномів (кожен поліном за змінними $x^m y^n, m,n \in \mathbb{N}_0$), яку позначимо таким чином:

$$\begin{array}{lllll}
P_{0;0}(x,y); & P_{1;0}(x,y), & P_{2;0}(x,y), & \dots; & P_{n;0}(x,y), \quad \dots \\
& P_{1;1}(x,y); & P_{2;1}(x,y), & & P_{n;1}(x,y), \\
& & P_{2;2}(x,y), & & P_{n;2}(x,y), \\
& & & & \dots \\
& & & & P_{n;n}(x,y);
\end{array} \tag{2.3}$$

де кожен поліном має вигляд $P_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha}x^\alpha y^{n-\alpha} + \cdots, n \in \mathbb{N}_0, \alpha = 0,1,\dots,n, k_{n;\alpha} > 0$; тут $+\dots$ позначимо наступну частину відповідного полінома;

для зручності ми покладаємо $P_{0;0}(x,y)=1$. Таким чином $P_{n;\alpha}$ деякі лінійні комбінації

$$\{1;\ x^0y^1, x^1y^0; \dots;\ x^0y^n, x^1y^{n-1}, \dots, x^\alpha y^{n-\alpha}\}. \qquad (2.4)$$

Оскільки множина (2.1) є цільною в просторі L_2, то послідовність (2.3) – це ортонормований базис в цьому просторі.

Нехай підпростір $\mathcal{P}_{n;\alpha}, \forall n \in \mathbb{N}$ натягнутий на (2.4). Очевидно, що $\forall n \in \mathbb{N}$ ми маємо:

$$\mathcal{P}_{0;0} \subset \mathcal{P}_{1;0} \subset \mathcal{P}_{1;1} \subset \mathcal{P}_{2;0} \subset \mathcal{P}_{2;1} \subset \mathcal{P}_{2;2} \subset \cdots \subset \mathcal{P}_{n;0} \subset \mathcal{P}_{n;1} \subset \cdots \subset \mathcal{P}_{n;n} \subset \cdots,$$

$$\mathcal{P}_{n;\alpha} = \{P_{0;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;0}(x,y)\} \oplus \{P_{1;1}(x,y)\} \oplus \{P_{2;0}(x,y)\} \oplus \{P_{2;1}(x,y)\} \oplus$$
$$\oplus \{P_{2;2}(x,y)\} \oplus \dots \oplus \{P_{n;0}(x,y)\} \oplus \{P_{n;1}(x,y)\} \oplus \dots \oplus \{P_{n;\alpha}(x,y)\}, \qquad (2.5)$$

коли $\{P_{n;\alpha}(x,y)\}, n \in \mathbb{N}, \alpha = 0,1,\dots,n,$ позначимо одновимірний простір, натягнутий на $P_{n;\alpha}(x,y)$; $\mathcal{P}_{0;0} = \mathbb{R}$.

2.2 Побудова технічного простору l_2 і розгляд в ньому загального самоспряженого оператора

Для наступного дослідження потрібно замість звичайного простору l_2 ввести Гільбертів простір

$$\boldsymbol{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots, \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, n \in \mathbb{N}_0. \qquad (2.6)$$

Кожен вектор $f \in l_2$ має вигляд $f = {f_n}_{n=0}^{\infty}, f_n \in \mathcal{H}_n$, і, отже:

$$\|f\|_{l_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty, (f,g)_{l_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathcal{H}_n}, \forall f, g \in l_2.$$

Для координат вектора $f_n \in \mathcal{H}_n, n \in \mathbb{N}_0$ в деякому ортонормованому базисі $\{e_{n;0}, e_{n;1}, e_{n;2}, \dots, e_{n;n}\}$ в просторі $\mathbb{C}^{n+1}$ позначимо через $(f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \dots, f_{n;n})$, і, отже, отримаємо $f_n = (f_{n;0}, f_{n;1}, f_{n;2}, \dots, f_{n;n})$.

Використовуючи ортонормовану систему (2.3), можна визначити відображення $\mathbf{l}_2$ в L_2. Покладемо $P_n(x,y) = \big(P_{n;0}, P_{n;1}(x,y), P_{n;2}(x,y), \dots, P_{n;n}\big) \in \mathcal{H}_n, \forall x,y \in \mathbb{R}^2, \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}_0$. Тоді

$$\boldsymbol{l}_2 \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (If)(x,y) \coloneqq \hat{f}(x,y) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \big(f_n, P_n(x,y)\big)_{\mathcal{H}_n} \in L_2 \qquad (2.7)$$

Тому для n $\in \mathbb{N}_0$ отримаємо

$$(f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n}$$
$$= f_{n;0}\overline{P_{n;0}(x,y)} + f_{n;1}\overline{P_{n;1}(x,y)} + f_{n;2}\overline{P_{n;2}(x,y)} + \cdots + f_{n;n}\overline{P_{n;n}(x,y)}$$

і

$$\|f\|_{l_2}^2 = \left\|(f_{0;0}, f_{1;0}, f_{1;1}, f_{2;0}, f_{2;1}, f_{2;2}, \dots, f_{n;0}, \dots, f_{n;n}, \dots)\right\|_{l_2}^2.$$

Тоді (2.7) – це відображення простору $\mathbf{l}_2$ в L_2, враховуючи щільність ортонормованої системи (2.3) а, отже, це відображення ізометричне. Відображення (2.7) переводить весь простір l_2 у весь простір L_2, бо система (2.3) – це ортонормований базис в L_2. Тому відображення (2.7) – це унітарне перетворення (яке позначається I), яке діє з $\mathbf{l}_2$ в L_2.

Нехай T – лінійний обмежений оператор, визначений на просторі $\mathbf{l}_2$. Тоді існує єдиний $\tau_{j;k}{}_{j,k=0}^{\infty}$, де для кожного $j,k \in \mathbb{N}_0$ елемент $\tau_{j;k}$ є оператором з $\mathcal{H}_k$ в $\mathcal{H}_j$ так, що

$$(Tf)_j = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{j;k} f_k, j \in \mathbb{N}_0, (Tf,g)_{l_2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \left(\tau_{j;k} f_k, g_j\right)_{\mathcal{H}_j}, f,g \in \boldsymbol{l}_2 \qquad (2.8)$$

Для доведення (2.8) нам потрібно тільки описати T в просторі $\mathbf{l}_2$, використовуючи базис

$$(e_{0;0}, e_{1;0}, e_{1;1}, e_{2;0}, e_{2;1}, e_{2;2}, \dots, e_{n;0}, e_{n;1}, \dots, e_{n;n}, \dots), e_{0;0} = 1. \qquad (2.9)$$

Тоді $\tau_{j;k}$ є оператором $\mathcal{H}_k \mapsto \mathcal{H}_j$ для кожного $j,k \in \mathbb{N}_0$. Оператор має матричний вигляд

$$\tau_{j,k;\alpha,\beta} = (T_{e_{k,\beta}, e_{j;\alpha}})_{l_2}, \qquad (2.10)$$

при $\alpha = 0,1,\dots,j$ і $\beta = 0,1,\dots,k$. Перепишемо $\tau_{j;k} = (\tau_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ як: $\tau_{0;k} = (\tau_{0,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{0,k}, \tau_{j;0} = (\tau_{j,0;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,0}$ і $\tau_{0;0} = (\tau_{0,0;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{0,0} = \tau_{0,0;0,0}$.

Варто зауважити, що в представленні (2.8) це правильно і для загального оператора T в просторі $\mathbf{l}_2$ з областю визначення $Dom(T) = \mathbf{l}_{\text{fin}} \subset \mathbf{l}_2$, де $\mathbf{l}_{\text{fin}}$ позначає фінітні вектори $\mathbf{l}_2$. У цьому випадку перша формула з (2.8) виконується для $f \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$; друга формула – для $f \in \mathbf{l}_{\text{fin}}, g \in \mathbf{l}_2$.

Розглянемо зображення $\widehat{T} = ITI^{-1}: L_2 \to L_2$ обмеженого оператора $T: \mathbf{l}_2 \to \mathbf{l}_2$ з відображенням (2.7). Ця матриця в базисі (2.3):

$P_{0;0}(x,y)$; $P_{1;0}(x,y)$, $P_{1;1}(x,y)$; $P_{2;0}(x,y)$, $P_{2;1}(x,y)$, $\mathrm{P}_{2;2}(\mathrm{x},\mathrm{y})$; … ; $P_{n;0}(x,y), P_{n;1}(x,y), \ldots, P_{n;n}(x,y); \ldots,$

дорівнює звичайній матриці оператора T, яка розуміється, як оператор: $\mathbf{l}_2 \to \mathbf{l}_2$ у відповідному базисі (2.9). Використовуючи (2.10) і згадану вище процедуру, ми отримаємо матричний оператор $(\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ $T: \mathbf{l}_2 \to \mathbf{l}_2$. За визначенням ця матриця також є матричним оператором $\widehat{T}: L_2 \to L_2$.

2.3 Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідної першій змінній

Очевидно, що $\widehat{T}$ може бути довільним лінійним обмеженим оператором L_2. Розглянемо T замість $\widehat{T}$, і замість T візьмемо A і B відповідних матриць J_A і J_B.

Лема 2.3.1 *Для поліномів $P_{n;\alpha}(x,y)$, і підпросторів $P_{m;\beta}, n, m \in \mathbb{N}_0, \alpha = 0,1,\ldots,n, \beta = 0,1,\ldots,m$, виконуються співвідношення:*

$$xP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha+1}, yP_{n;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{n+1;\alpha}. \qquad (2.11)$$

Доведення. Відповідно до (2.3) поліном $P_{n;\alpha}(x,y), n \in \mathbb{N}_0$, утворений лінійною комбінацією $\{1; x^0y^1, x^1y^0; \ldots; x^0y^n, x^1y^{n-1}, \ldots, x^{\alpha}y^{n-\alpha}\}$. Отже, помноживши її на x, отримаємо лінійну комбінацію $\{x; x^1y^1, x^2y^0; \ldots; x^1y^n, x^2y^{n-1}, \ldots, x^{\alpha+1}y^{n-\alpha}\}$ і така лінійна комбінація належить до $\mathcal{P}_{n+1;\alpha+1}$. Аналогічно помножимо її на y отримаємо лінійну комбінацію $\{y; x^0y^2, x^1y^1; \ldots; x^0y^{n+1}, x^1y^n, \ldots, x^{\alpha}y^{n-\alpha+1}\}$ і така лінійна комбінація належить до $\mathcal{P}_{n+1;\alpha}$.

Лема 2.3.2 *Нехай $\hat{A}$ є оператором множення x в просторі L_2:*

$$L_2 \ni \varphi(x,y) \mapsto \big(\hat{A}\varphi\big)(x,y) = x\varphi(x,y) \in L_2.$$

(Очевидно, що $\hat{A}$ – самоспряжений і обмежений) Матриця $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}\widehat{A}$ в базисі (31) (тобто $A = I^{-1}\hat{A}I$) має тридіагональну структуру: $a_{j,k} = 0$ для $|j-k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (2.10) для $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y), n \in \mathbb{N}_0;\ \gamma = 0,1,\dots,n$, отримаємо $\forall j,k \in \mathbb{N}_0$

$$a_{j,k;\alpha,\beta} = (Ae_{k;\beta}e_{j;\alpha})_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} xP_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y), \tag{2.12}$$

де $\alpha = 0,1,\dots,j, \beta = 0,1,\dots,k$. З (2.11) отримаємо $xP_{k;\beta}(x,y) \in P_{k+1;\beta+1}$. Відповідно до виразів з (2.5) інтеграл в (2.12) дорівнює нулю для $j > k+1$ і для кожного $\beta = 0,1,\dots,j$.

З іншого боку, інтеграл (2.12) має вигляд

$$(a^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^2} x\,P_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y) =$$
$$\overline{\int_{\mathbb{R}^2} xP_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}d\rho(x,y)} = \overline{a_{j,k;\alpha,\beta}}, \tag{2.13}$$

Коли $\alpha = 0,1,\dots,j$ і $\beta = 0,1,\dots,k$, так як, оператор $\hat{A}$ симетричний. З (2.11) маємо: $xP_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$. Відповідно до (2.5) останній інтеграл дорівнює нулю для $k > j+1$ і для кожного $\alpha = 0,1,\dots,k$.

У результаті інтеграл (2.12), тобто коефіцієнти $a_{j,k;\alpha,\beta}, j,k \in \mathbb{N}_0$, дорівнюють нулю для $|j-k| > 1$; $\alpha = 0,1,\dots,j$ і $\beta = 0,1,\dots,k$. (У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x,y) = 1$).

Таким чином матриця $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{A}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} a_{0;0} & a_{0;1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{1;0} & a_{1;1} & a_{1;2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_{3;2} & a_{3;3} & a_{3;4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Більш ретельний аналіз виразів (2.12) дає можливість виявити нульові і ненульові елементи матриці $(a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ в кожному випадку для $|j-k| \leq 1$. Ми використовуємо також властивості перестановок матричних індексів j,k, і α,β.

Лема 1.3.3.3 *Нехай* $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *- матричний оператор множення x в* L_2*, де* $a_{j,k}\colon \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_j$; $a_{j,k} = (a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ *є матрицями операторів* $a_{j,k}$ *у відповідному ортонормованому базисі. Тоді* $\forall j \in \mathbb{N}_0$,

$$\forall\alpha = 0,1, \dots j-1 \; a_{j,j+1;\alpha,\alpha+2} = a_{j,j+1;\alpha,\alpha+3} = \cdots = a_{j,j+1;\alpha,j+1} = 0;$$
$$\forall\beta = 0,1, \dots j-1 \; a_{j+1,j;\beta+2,\beta} = a_{j+1,j;\beta+3,\beta} = \cdots = a_{j+1,j;j+1,\beta} = 0. \tag{2.15}$$

Якщо ми виберемо всередині кожної діагоналі

$$\{x^0y^n, x^ny^{n-1}; x^0y^{n-2}, \dots, x^ny^0\}$$

інший порядок (зі збереженням порядку діагоналей), то лемма 2.3.3 не вірна, але це також дає можливість описати матриці $(a_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$. Такі матриці $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ мають також тридіагональну блочну структуру і мають інші елементи рівні нулю.

Доведення. Відповідно до (2.12) і (2.11) для $j \in \mathbb{N}_0, \forall\alpha = 0,1, \dots, j$ і $\forall\beta = 0,1, \dots, j+1$ маємо:

$$a_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^2} x\, P_{j+1;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y)$$
$$= \overline{\int_{\mathbb{R}^2} x\, P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\beta}(x,y)}d\rho(x,y)},$$

де $xP_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$. Але, відповідно до (2.5), $P_{j+1;\beta}(x,y)$ ортогональний $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}$ для $\beta > \alpha + 1$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Завдяки цьому отримуємо перші рівності в (2.15).

Аналогічно для (2.12) і (2.11) для $j \in \mathbb{N}_0, \forall\alpha = 0,1, \dots, j$ і $\forall\beta = 0,1, \dots, j+1$ маємо

$$a_{j+1,j;\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^2} x\, P_{j;\beta}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y),$$

де $xP_{j;\beta}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\beta+1}$. Але відповідно до (2.5) $P_{j+1;\alpha}(x,y)$ є ортогональним до $\mathcal{P}_{j+1;\beta+1} if\ \alpha > \beta + 1$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Завдяки цьому отримуємо (2.15).

Таким чином, після цих досліджень можна зробити висновок, що для $\forall j \in \mathbb{N}$ правий кут для кожної $((j+1) \times (j+2))$-матриці $a_{j,j+1}$ (починаючи з третьої діагоналі) і лівий кут для кожної $((j+2) \times (j+1))$-матриці $a_{j+1,j}$ (починається з третьої діагоналі) складається з нульових елементів. Можемо зробити висновок, що матриця оператора множення на x – мультидіагональна звичайна скалярна матриця, тобто в звичайному базисі простору $\boldsymbol{l_2}$.

Лема 2.3.4 *Елементи*

$$a_{0,1;0,1}, a_{1,0;1,0}; \;\; a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1}, a_{j+1,j;\alpha+1,\alpha}; \;\; j \in \mathbb{N}, \alpha = 0,1, \dots j, \tag{2.16}$$

матриці $(a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *з леми 2.4.2 є додатнім.*

Доведення. Почнемо з дослідження $a_{0,1;0,1}$. Позначимо через $P'_{1;1}(x,y)$ ненормований вектор $P_{1;1}(x,y)$. Відповідно до (30) і (31), маємо:

$$P'_{1;1}(x,y) = x - \Big(x, P_{1;0}(x,y)\Big)_{L_2} P_{1;0}(x,y) - (x,1)_{L_2}.$$

Тому, використовуючи, отримаємо

$$a_{0,1;0,1} = \int_{\mathbb{R}^2} x\, P_{0;0} P_{1;1}(x,y) d\rho(x,y) = \left\|P'_{1;1}(x,y)\right\|_{L_2}^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} x\, P'_{1;1}(x,y) d\rho(x,y) =$$

$$\left\|P'_{1;1}(x,y)\right\|_{L_2}^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} x\, (x - \big(x, P_{1;0}(x,y)\big)_{L_2} P_{1;0}(x,y) - (x,1)_{L_2}\big) d\rho(x,y) =$$

$$\left\|P'_{1;1}(x,y)\right\|_{L_2}^{-1} (\|x\|_{L_2}^2 - \left|\Big(x, P_{1;0}(x,y)\Big)_{L_2}\right|^2 - \left|(x,1)_{L_2}\right|^2), \tag{2.17}$$

де (1=$P_{0;0}(x,y)$).

Також, покладемо, що останній вираз додатній і, отже, $a_{0,1;0,1} > 0$. Оскільки оператор A симетричний, то $a_{0,1;0,1} = a_{1,0;1,0}$.

Додатність в (2.17) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $y \in L_2$ відносно ортонормованого базису (2.3) в просторі L_2:

$$\left|(x,1)_{L_2}\right|^2 + \left|\Big(x, P_{1;0}(x,y)\Big)_{L_2}\right|^2 + \left|\Big(x, P_{1;1}(x,y)\Big)_{L_2}\right|^2 + \cdots = \|x\|_{L_2}^2. \tag{2.18}$$

Розглянемо елементи $a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1}$, де $j \in \mathbb{N}, \alpha = 0,1, \dots j$.

Маємо

$$a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = \int_{\mathbb{R}^2} x\, P_{j+1;\alpha+1}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y) = \overline{\int_{\mathbb{R}^2} x\, P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha+1}(x,y)}d\rho(x,y)}. \quad (2.19)$$

$P_{j;\alpha}(x,y)$ отримаємо відповідно до (2.3) і (2.5):

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha}x^{\alpha}y^{j-\alpha} + R_{j;\alpha}(x,y), \quad (2.20)$$

де $R_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$, якщо $\alpha > 0$ або з $\mathcal{P}_{j-1;j-1}$, якщо $\alpha = 0$. Тому $xR_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або з $\mathcal{P}_{j;j}$.

Помноживши його на x, ми отримаємо

$$xP_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha}x^{\alpha+1}y^{j-\alpha} + xR_{j;\alpha}(x,y) \quad (2.21)$$

де $xR_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або $\mathcal{P}_{j;j}$. З іншого боку, рівність (2.20) дає:

$$P_{j+1;\alpha}(x,y) = k_{j+1;\alpha}x^{\alpha+1}y^{j-\alpha} + R_{j+1;\alpha}(x,y) \quad (2.22)$$

де $R_{j+1;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ якщо $\alpha > 0$ або належить до $\mathcal{P}_{j;j}$, якщо $\alpha = 0$.

Знайдемо $x^{\alpha+1}y^{j-\alpha}$ з (2.22) і підставимо його в (2.21). Отримаємо:

$$xP_{j;\alpha}(x,y) = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}\left(P_{j+1;\alpha}(x,y) - R_{j+1;\alpha}(x,y)\right) + xR_{j;\alpha}(x,y) = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}P_{j+1;\alpha}(x,y) - \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}R_{j+1;\alpha}(x,y) + xR_{j;\alpha}(x,y) \quad (2.23)$$

Другі два члени в (2.23) належать до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або до $\mathcal{P}_{j;j}$ і в будь-якому разі, ортогональні до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha+1}(x,y)$.

Тому заміна виразу (2.23) на (2.19) дає: $a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha+1}} > 0$, оскільки матриця має симетричні елементи $a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = a_{j,j+1;\alpha,\alpha+1}$ також додатні $j \in \mathbb{N}, \alpha = 0,1,\dots j$.

Перепозначимо:

$$a_n = a_{n+1,n} \;: \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1},$$
$$b_n = a_{n,n} \;: \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n, \quad (2.24)$$
$$c_n = a_{n,n+1} : \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Всі попередні дослідження узагальнені в такій теоремі.

Теорема 2.3.5 *Обмежений самоспряжений оператор $\hat{A}$ множення на x в просторі L_2 в ортонормованому базисі (2.3) многочленів має вигляд тридіагональної блочної симетричної матриці типу Якобі $J_A = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ яка діє в просторі (2.6):*

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots, \mathcal{H}_\mathrm{n} = \mathbb{C}^{\mathrm{n}+1}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}_0. \quad (2.25)$$

Норми всіх операторів $a_{j,k}: \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_j$ рівномірно обмежені відносно до $j, k \in \mathbb{N}_0$. У позначеннях (2.24), ця матриця має вигляд:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} * & * & + & & & & & & & & & & & & \\ * & * & * & * & + & 0 & & & & & & & & & \\ + & * & * & * & * & + & & & & & & & & & \\ & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & & & & & \\ & + & * & * & * & * & * & * & + & 0 & & & & & \\ & 0 & + & * & * & * & * & * & * & + & & & & & \\ & & & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 \\ & & & + & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 \\ & & & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 \\ & & & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & * & * & + \\ & & & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & \end{array}\right] \quad (2.26)$$

В (2.26) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ b_n є $((n+1) \times (n+1))$-матриця: $b_n = (b_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$, ($b_0 = b_{0;0,0}$ є скаляром); a_n є $((n+2) \times (n+1))$-матриця: $a_n = (a_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$; c_n is $((n+1) \times (n+2))$-матриця: $c_n = (c_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$. В цій матриці a_n і c_n деякі елементи завжди дорівнюють нулю: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n;\beta+2,\beta} = a_{n;\beta+3,\beta} = \dots = a_{n;n+1,\beta} = 0, \beta = 0,1, \dots, n-1;$$

$$c_{n;\alpha,\alpha+2} = c_{n;\alpha,\alpha+3} = \dots = c_{n;\alpha,n+1} = 0, \alpha = 0,1, \dots, n-1 \quad (2.27)$$

Деякі інші елементи додатні, а саме:

$$a_{n;\alpha+1,\alpha}; c_{n;\alpha,\alpha+1} > 0, \alpha = 0,1, \dots, n, \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.28)$$

Таким чином, можна говорити, що $\forall n \in \mathbb{N}_0$ *кожен верхній лівий кут матриці* a_n *(починаючи з третьої діагоналі) і кожен правий кут матриці* c_n *(починаючи з третьої діагоналі) складаються з нульових елементів. Всі позитивні елементи (2.26) позначаються «+».*

Отже, матриця (2.26) в скалярному вигляді багатодіагональна у зазначеній структурі.

Симетрій оператора $(\hat{A})^* = \hat{A}$ *дає*

$a_{n;\alpha,\beta} = c_{n;\beta,\alpha}, \beta = 0,1,2,\dots,n, \alpha = 0,1,\dots,\beta,\beta+1, n \in \mathbb{N}_0.$

Матриця J_A *діє таким чином:*

$$(J_A f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}, n \in \mathbb{N}_0, \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \boldsymbol{l_2} \qquad (2.29)$$

де покладаємо $f_{-1} = 0$.

2.4 Дослідження блочної структури матриці типу Якобі відповідній другій змінній

Перейдемо тепер до дослідження матриці J_B пов’язаної зі зміною y. З цієї причини нам потрібна лема схожа з 2.3.1.

Лема 2.4.1 *Нехай* $\hat{B}$ *– оператор множення на у в просторі* L_2*:*

$L_2 \ni \varphi(x,y) \longmapsto (\hat{B}\varphi)(x,y) = y\varphi(x,y) \in L_2.$

(Очевидно, що $\hat{B}$ *самоспряжений і обмежений). Матриця* $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *оператора* $\hat{B}$ *в базисі (2.3) (тобто* $B = I^{-1}\hat{B}I$*) має тридіагональну структуру:* $b_{j,k} = 0$ *для* $|j-k| > 1$.

Доведення. Використовуючи (2.10) для $e_{n;\gamma} = I^{-1}P_{n;\gamma}(x,y), n \in \mathbb{N}_0;\ \gamma = 0,1,\dots,n$, отримаємо $\forall j,k \in \mathbb{N}_0$

$$b_{j,k;\alpha,\beta} = (Be_{k;\beta}, e_{j;\alpha})_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} y\, P_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y) \qquad (2.30)$$

де $\alpha = 0,1,\dots,j, \beta = 0,1,\dots,k$. З (2.11) ми маємо $yP_{k;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{k+1;\alpha}$. Відповідно до (2.5) інтеграл (2.30) дорівнює нулю для $k > j+1$ для кожного $\alpha = 0,1,\dots,j$.

З іншого боку, інтеграл у (2.30) має вигляд:

$$(b^*)_{j,k;\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^2} y\, P_{k;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y) =$$

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^2} y\, P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{k;\beta}(x,y)}d\rho(x,y)} = \overline{b_{k,j;\beta,\alpha}} \qquad (2.31)$$

де $\alpha = 0,1,\dots,j, \beta = 0,1,\dots,k$. З (2.11) ми маємо $yP_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha}$. Відповідно до (2.5) інтеграл (2.31) дорівнює нулю для $k > j+1$ для кожного $\alpha = 0,1,\dots,j$.

У результаті інтеграл у (2.30), тобто коефіцієнти $b_{j,k;\alpha,\beta}$ $j,k \in \mathbb{N}_0$, дорівнюють нулю для $|j-k| > 1; \alpha = 0,1,\dots,j, \beta = 0,1,\dots,k.$ (У попередніх міркуваннях необхідно брати до уваги, що $e_{0;0} = I^{-1}P_{0;0}(x,y) = 1$).

Таким чином матриця $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ оператора $\hat{B}$ має тридіагональну блочну структуру

$$\begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

Більш ретельний аналіз виразів (2.30) дає можливість визначити нульові і ненульові елементи матриці $(b_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ в кожному випадку для $|j-k| \leq 1$.Ми використовуємо також властивості перестановок матричних індексів $j,k,$ і α,β.

Лема 2.4.2 *Нехай* $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *- матричний оператор множення на* y *в* L_2, $b_{j,k}\colon \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_j$; $b_{j,k} = (b_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$ *– матриці операторів* $b_{j,k}$ *у відповідному ортонормованому базисі. Тоді* $\forall j \in \mathbb{N}_0$ *і*

$$\forall\alpha = 0,1,\dots j-1\ b_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = b_{j,j+1;\alpha,\alpha+2} = \cdots = b_{j,j+1;\alpha,j+1} = 0;$$

$$\forall\beta = 0,1,\dots j-1\ b_{j+1,j;\beta+1,\beta} = b_{j+1,j;\beta+2,\beta} = \cdots = b_{j+1,j;j+1,\beta} = 0. \qquad (2.33)$$

Якщо ми розглядаємо всередині кожної діагоналі елементи

$$\{x^0y^n, x^1y^{n-1}, x^2y^{n-2}, \dots, x^ny^0\}$$

тоді лема 2.4.2 не виконується, але це також можна описати нулями матриць $(b_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$. Такі матриці $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ мають також тридіагональну блочну структуру і мають нулі в інших місцях.

Доведення. Відповідно до (2.30) і (2.11) для $j \in \mathbb{N}_0$ $\forall\alpha = 0,1, \dots j$ і $\forall\beta = 0,1, \dots j$ ми маємо:

$$b_{j,j+1;\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^2} y\, P_{j+1;\beta}(x,y)\overline{P_{j;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y)$$
$$= \overline{\int_{\mathbb{R}^2} y\, P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\beta}(x,y)}d\rho(x,y)}$$

де $yP_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha}$. Але відповідно до (2.5) $P_{j+1;\beta}(x,y)$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ для $\beta > \alpha$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Це дає перші рівності в (2.33).

Аналогічно з (2.30) і (2.11) для $j \in \mathbb{N}_0$ $\forall\alpha = 0,1, \dots j$ і $\forall\beta = 0,1, \dots j$ ми отримаємо

$$b_{j+1,j;\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^2} y\, P_{j;\beta}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y),$$

коли $yP_{j;\beta}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\beta}$. Але відповідно до (2.5) $P_{j+1;\alpha}(x,y)$ ортогональний до $\mathcal{P}_{j+1;\beta}$ для $\alpha > \beta$ і, отже, останній інтеграл дорівнює нулю. Це дає другі рівності в (2.15).

Таким чином, після цих досліджень можна зробити висновок, що в (2.32) для $\forall\, j \in \mathbb{N}$ в правому куті кожної $((j+1)\times(j+2))$-матриці $b_{j,j+1}$ (починаючи з другої діагоналі) і в лівому куті кожної $((j+2)\times(j+1))$-матриці $b_{j+1,j}$ (починаючи з другої діагоналі) стоять ненульові елементи. Можемо зробити висновок, що симетрична матриця оператора множення на у є мультидіагональною зазвичай скалярною матрицею, тобто утворює базис в просторі l_2.

Лема 2.4.3 *Елементи*

$$b_{0,1;0,0}, b_{1,0;0,0};\ b_{j,j+1;\alpha,\alpha}, b_{j+1,j;\alpha,\alpha}; j \in \mathbb{N}, \alpha = 0,1,\dots,j \tag{2.34}$$

матриці $(b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ *з леми 2.4.2 є додатними.*

Доведення. Ми почали з дослідження $b_{1,0;0,0}$. Використовуючи (2.12) і позначаючи через $P'_{1;0}(x,y) = y - (y,1)_{L_2}$ ненормований вектор $P_{1;0}(x,y)$ ми отримаємо

$$b_{1,0;0,0} = \int_{\mathbb{R}^2} y\, P_{0;0}(x,y)\overline{P_{1;0}(x,y)}d\rho(x,y) =$$

$$\left\|P'_{1;0}(x,y)\right\|_{L_2}^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} y\overline{(y-(y,1)_{L_2})}d\rho(x,y) = \left\|P'_{1;0}(x,y)\right\|_{L_2}^{-1}\left(\|y\|_{L_2}^2 - \left|(y,1)_{L_2}\right|^2\right) \tag{2.35}$$

де ми врахували $P_{0;0}(x,y) = 1$. Остання різниця додатня, тому $b_{1,0;0,0} > 0$.

Елемент $b_{0,1;0,0}$ також додатній, оскільки матриця B симетрична, тобто $b_{1,0;0,0} = b_{0,1;0,0}$.

Додатність (2.35) випливає з рівності Парсеваля про розклад функції $y \in L_2$ за ортонормованим базисом (2.3) в просторі L_2:

$$\left|(y,1)_{L_2}\right|^2 + \left|(y, P_{1;0}(x,y))_{L_2}\right|^2 + \left|(y, P_{1;1}(x,y))_{L_2}\right|^2 + \cdots = \|y\|_{L_2}^2 \tag{2.36}$$

Перейдемо до доведення додатності $b_{j+1,j;\alpha,\alpha}$, коли $j \in \mathbb{N}, \alpha = 0,1,\dots,j$

З (2.12) маємо:

$$b_{j+1,j;\alpha,\alpha} = \int_{\mathbb{R}^2} y\, P_{j;\alpha}(x,y)\overline{P_{j+1;\alpha}(x,y)}d\rho(x,y). \tag{2.37}$$

Відповідно до (2.3) і (2.5):

$$P_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha}x^{\alpha}y^{j-\alpha} + \mathcal{R}_{j;\alpha}(x,y) \tag{2.38}$$

де $\mathcal{R}_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j;\alpha-1}$, якщо $\alpha > 0$ або з $\mathcal{P}_{j-1;j-1}$, якщо $\alpha = 0$. Тому $y\mathcal{R}_{j;\alpha}(x,y)$ – деякий поліном з $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}$ або з $\mathcal{P}_{j;j-1}$. Помноживши (2.38) на x, ми робимо висновок:

$$yP_{j;\alpha}(x,y) = k_{j;\alpha}x^{\alpha}y^{j-\alpha+1} + x\mathcal{R}_{j;\alpha}(x,y) \tag{2.39}$$

де $y\mathcal{R}_{j;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$ або $\mathcal{P}_{j;j-1} \subset \mathcal{P}_{j;j}$.

З іншого боку, рівність (2.38) для $\mathcal{P}_{j+1;\alpha}(x,y)$ дає:

$$P_{j+1;\alpha}(x,y) = k_{j+1;\alpha}x^{\alpha}y^{j-\alpha+1} + \mathcal{R}_{j+1;\alpha}(x,y) \tag{2.40}$$

де $\mathcal{R}_{j+1;\alpha}(x,y) \in \mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$ або $\mathcal{P}_{j;j}$.

Знайти $x^{\alpha}y^{j-\alpha+1}$ з (2.40) і підставити його в (2.39). Ми отримаємо:

$$yP_{j;\alpha}(x,y) = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}\left(P_{j+1;\alpha}(x,y) - \mathcal{R}_{j+1;\alpha}(x,y)\right) + y\mathcal{R}_{j;\alpha}(x,y) =$$

$$\frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}P_{j+1;\alpha}(x,y) - \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}}\mathcal{R}_{j+1;\alpha}(x,y) + y\mathcal{R}_{j;\alpha}(x,y) \qquad (2.41)$$

де обидва останні доданки $\mathcal{P}_{j+1;\alpha-1}$або $\mathcal{P}_{j;j}$ в будь-якому разі ортогональні до $P_{j+1;\alpha}(x,y)$.

Тому, після подстановки, вираз (2.41) в (2.37) ми отримаємо $b_{j+1,j;\alpha,\alpha} = \frac{k_{j;\alpha}}{k_{j+1;\alpha}} > 0$.

Елементи $b_{j,j+1;\alpha,\alpha+1} = b_{j+1,j;\alpha+1,\alpha}$ також позитивні, коли $j \in \mathbb{N}, \alpha = 0,1,\dots,j$.

Перепозначимо:

$$\begin{aligned} u_n &= b_{n+1,n} \ : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1}, \\ w_n &= b_{n,n} \ : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n, \\ v_n &= b_{n,n+1} : \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \qquad (2.42)$$

Всі попередні дослідження підсумовуються в теоремі.

Теорема 2.4.4 *Обмежений самоспряжений оператор $\hat{B}$ множення на y в просторі L_2 в ортонормованому базисі (2.3) поліномів має вигляд тридіагональної блочної симетричної матриці типу Якобі $J_B = (b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ яка діє в просторі (2.6):*

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots, \mathcal{H}_\mathrm{n} = \mathbb{C}^{\mathrm{n}+1}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}_0. \qquad (2.43)$$

Норми всіх операторів $b_{j,k}: \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_j$ рівномірно обмежені відносно до $j,k \in \mathbb{N}_0$. У позначеннях (2.24), ця матриця має вигляд:

$$J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & u_2 & w_3 & v_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$
=\left[\begin{array}{ccccccccccccccc}
* & + & 0 & & & & & & & & & & & & \\
+ & * & * & + & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & * & * & * & + & 0 & & & & & & & & & \\
 & + & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & 0 & + & * & * & * & * & + & 0 & 0 & & & & & \\
 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & + & 0 & & & & & \\
 & & & + & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & + & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & + & * & * & * & * & * & * & + & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & + & 0 \\
 & & & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & &
\end{array}\right] \qquad (2.44)
$$

В (2.44) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ w_n є $((n+1)\times(n+1))$*-матриця:* $w_n = (w_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$, *(*$w_0 = w_{0;0,0}$ *є скаляром);* u_n є $((n+2)\times(n+1))$*-матриця:* $u_n = (a_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$; v_n є $((n+1)\times(n+2))$*-матриця:* $v_n = (c_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$. *В цій матриці* u_n *і* v_n *деякі елементи завжди дорівнюють нулю:* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n;\beta+1,\beta} = u_{n;\beta+2,\beta} = \cdots = u_{n;n+1,\beta} = 0, \beta = 0,1,\dots,n;$$

$$v_{n;\alpha,\alpha+1} = v_{n;\alpha,\alpha+2} = \cdots = v_{n;\alpha,n+1} = 0, \alpha = 0,1,\dots,n \qquad (2.45)$$

Деякі інші елементи додатні, а саме:

$$u_{n;\alpha,\alpha}; v_{n;\alpha,\alpha+1} > 0, \alpha = 0,1,\dots,n, \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad (2.46)$$

Таким чином, можна говорити, що $\forall n \in \mathbb{N}_0$ *кожен верхній лівий кут матриці* u_n *(починаючи з третьої діагоналі) і кожен правий кут матриці* c_n *(починаючи з третьої діагоналі) складаються з нульових елементів. Всі позитивні елементи (2.44) позначаються «+».*

Отже, матриця (2.44) в скалярному вигляді багатодіагональна у зазначеній структурі.

Симетрій оператора $\left(\hat{B}\right)^* = \hat{B}$ *дає*

$u_{n;\alpha,\beta} = v_{n;\beta,\alpha}, \beta = 0,1,2,\dots,n, \alpha = 0,1,\dots,\beta,\beta+1, n \in \mathbb{N}.$

Матриця J_B *діє таким чином:*

$$(J_B f)_n = u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, n \in \mathbb{N}_0, \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \boldsymbol{l_2} \qquad (2.47)$$

де покладаємо $f_{-1} = 0$.

Розділ 3. Пряма спектральна задача

Одним із основних результатів роботи є розв'язання прямої спектральної задачі і відновлення міри за заданими блочними матрицями. Під відновленням розуміємо запис відповідних рівностей Парсеваля для узагальнених власних векторів.

3.1. Побудова оснащення стандартно пов'язаного із парою комутуючії самоспряжених операторів в просторі $\boldsymbol{l_2}$

Ми розглянемо оператори в просторі l_2 вигляду (2.6). Додатково до простору $\boldsymbol{l_2}$ ми розглянемо його оснащення

$$\left(l_{fin}\right)' \supset \ l_2(p^{-1}) \supset l_2 \ \supset l_2(p) \ \supset \ l_{fin}, \tag{3.1}$$

де $l_2(\boldsymbol{p})$ – зважений і вкладений в $\boldsymbol{l_2}$ простір з вагою $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n \ \geq 1$, $(p^{-1}) = (p_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$. В нашому випадку $l_2(\boldsymbol{p})$ гільбертовий простір послідовностей $f = (\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{\infty}}$, $\boldsymbol{f_n} \in \ \boldsymbol{H_n}$, для яких є норма і скалярний добуток:

$$\|f\|_{l_2}^2(p) = \ \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{H_n}^2 \, p_n \, , (f, g)_{l_{2(p)}} = \ \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n) \, H_n p_n, \tag{3.2}$$

Простір $l_2 \ (p^{-1})$ визначається аналогічно; нагадаємо, що $\boldsymbol{l_{fin}}$ – це простір скінчених послідовностей. $\left(l_{fin}\right)'$– це простір, спряжений з $\boldsymbol{l_{fin}}$. Легко показати, що вкладення $l_2(p) \to l_2$ квазіядерне, якщо $\sum_{n=0}^{\infty} np_n^{-1} < \infty$.

Нехай A і B – комутуючі обмежені самоспряжені оператори, пов'язані ланцюгом (3.1). Згідно з проекційною спектральною теоремою такий оператор має вигляд

$$Af \ = \int_{\mathbb{R}^2} x\Phi(x,y) \ d\sigma \ (x,y) f, \ \ Bf \ = \int_{\mathbb{R}^2} y\Phi(x,y) \ d\sigma \ (x,y) \, f, \ \ f \ \in \ l_2, \tag{3.3}$$

де $\Phi(x,y) : \ l_2(p) \ \to \ \boldsymbol{l_2}(p^{-1})$ – оператор узагальненого проектування і $d\sigma(x,y)$ є спектральною мірою. Для кожного $f \ \in \ l_{fin}$ проекція $\Phi(x,y)f \ \in \ \boldsymbol{l_2}(p^{-1})$ – це узагальнений власний вектор операторів A і B з відповідними власними значеннями x і y. Для всіх $f, g \in l_{\boldsymbol{fin}}$ рівність Парсеваля має вигляд

$$(f, g)_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi(x, y) f, g)_{l_2}\, d\sigma\,(x, y) \tag{3.4}$$

після замикання за неперервністю рівність (3.4) – виконується $\forall f, g \in \boldsymbol{l_2}$.

Позначимо через π_n оператор ортогонального проектування з l_2 на $H_n, n \in N_0$. Отже, $\forall \boldsymbol{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \boldsymbol{l_2}$ ми маємо $f_n = \pi_n f$. Цей оператор діє аналогічно на просторах $l_2(p)$ і $l_2(p^{-1})$.

Після замикання оператор матриці $\left(\Phi_{j,k}(x, y)\right)_{j,k=0}^{\infty}$ зображається так:

$$\Phi_{j,k}(x, y) = \pi_j \Phi(x, y) \pi_k \;:\; l_2 \to H_j, \; \left(H_k \to H_j\right). \tag{3.5}$$

Рівність Парсеваля (3.4) можна переписати таким чином:

$$(f, g)_{l_2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\Phi(x, y) \pi_k f, \pi_j g\right)_{l_2} d\sigma\,(x, y)$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\pi_j \Phi(x, y) \pi_k f, g\right)_{l_2} d\sigma(x, y)$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\Phi_{j,k}(x, y) f_k, g_j\right)_{l_2} d\sigma\,(x, y), \; \forall f, g \in l_2 \tag{3.6}$$

Перейдемо тепер до вивчення більш спеціальних обмежених операторів A і B, що діють у просторі l_2. А саме, нехай дано матриці J_A і J_B, які мають тридіагональну блочну структуру у вигляді (2.26) та (2.44). Таким чином, ці оператори A і B визначаються виразами в (2.29) і (2.47). Нагадаємо, що норми всіх елементів a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, v_n рівномірно обмежені для $n \in \mathbb{N}_0$.

Для подальших досліджень *ми припускаємо, що умови (2.27), (2.28) і (2.45), (2.46) виконані і додатково оператори A і B з (2.26) і (2.44) обмежені, комутуючі, самоспряжені на* l_2.

3.2 Розв'язання системи різницевих рівнянь, породженої блочними матрицями відповідними дійсній двовимірній проблемі моментів

На наступному кроці ми перепишемо рівність Парсеваля (3.6) в термінах узагальнених власних векторів комутуючих самоспряжених операторів *A* і *B*. Спочатку ми доведемо таку лему.

Лема 3.2.1 *Нехай* $\varphi(x,y) = \left(\varphi_n(x,y)\right)_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y) \in \mathrm{H}_n, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *узагальнений власний вектор з* $\left(l_{fin}\right)'$ *оператора A з власним числом x, а також узагальнений власний вектор B з власним числом y. Таким чином* $\varphi(x,y)$ *це розв язок з* $\left(l_{fin}\right)'$ *двох різницевих рівнянь (див. (2.29) та (2.47)):*

$$\left(J_{A\varphi}(x,y)\right)_n = a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + b_n\varphi_n(x,y) + c_n\varphi_{n+1}(x,y) = x\varphi_n(x,y),$$

$$\left(J_{B\varphi}(x,y)\right)_n = u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) + \omega_n\varphi_n(x,y) + v_n\varphi_{n+1}(x,y) = y\varphi_n(x,y),$$

$$n \in \mathbb{N}_0,\ \varphi_{-1}(x,y) =: 0,$$

з початковою умовою $\varphi_0 \in \mathbb{R}$.

Ми стверджуємо, що цей розв язок є таким : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(x,y) = Q_n(x,y)\varphi_0 = \left(Q_{n;0}, Q_{n;1}, \dots, Q_{n;n}\right)\varphi_0. \qquad (3.8)$$

Тут $Q_{n;\alpha}, \alpha = 0,1,\dots,n$ *–поліноми від x і y, і ці поліноми мають вигляд*

$$Q_{n;\alpha}(x,y) = l_{n;\alpha}y^{n-\alpha}x^{\alpha} + q_{n;\alpha}(x,y), \alpha = 1,\dots,n, \qquad (3.9)$$

Коли $l_{n;\alpha} > 0$ *і* $q_{n;\alpha}(x,y)$ *– залишок згідно (2 ц.2) і це деякі лінійні комбінації* $y^j x^k$, $0 \le j+k \le n-1, y^{n-(\alpha-1)}x^{\alpha-1}$. *Останні вирази описані для* $\alpha = 1,\dots,n$. *Отримаємо* $y^{n-1}x^{n-1} if\ \alpha = 0$.

Доведення. Для $n = 0$ система (3.7) має вигляд

$$\omega_0\varphi_0 + v_0\varphi_0 = y\varphi_0, \qquad v_{0;0,0}\varphi_{1;0} = \left(y - \omega_{0;0,0}\right)\varphi_{0,}$$

або

$b_0\varphi_0 + c_0\varphi_1 = x\varphi_0,$ $c_{0;0,0}\varphi_{1;0} + c_{0;0,1}\varphi_{1;1} = (x - b_{0;0,0})\varphi_0.$

(3.10)

Тут і надалі ми будемо позначати

$\varphi_n(x,y) = \Big(\varphi_{n;0}(x,y), \varphi_{n;1}(x,y), \dots, \varphi_{n;n}(x,y)\Big) \in \mathrm{H}_n, \forall_n \in \mathbb{N};$ $\varphi_0 = \varphi_{0;0}$.

Використовуючи припущення (2.27), (2.28) і (2.45), (2.46) перепишемо останн*і дві рівності в* (3.10) у вигляді

$\Delta_0\varphi_1(x,y) = \Big(\big(y - \omega_{0;0,0}\big)\varphi_0, \big(x - b_{0;0,0}\big)\varphi_0\Big);$

$\Delta_0 = \begin{pmatrix} \upsilon_{0;0,0} & 0 \\ c_{0;0,0} & c_{0;0,1} \end{pmatrix}, \upsilon_{0;0,0} > 0, c \equiv_{0;0,1} > 0.$ (3.11

Тому

$$\varphi_{1;0}(x,y) = \frac{1}{\upsilon_{0;0,0}}\big(y - \omega_{0;0,0}\big)\varphi_0 = Q_{1;0}(x,y)\varphi_{0,}$$

$$\varphi_{1;1}(x,y) = \left(\frac{\big(x - b_{0;0,0}\big)}{c_{0;0,1}} - \frac{c_{0;0,0}\big(y - \omega_{0;0,0}\big)}{c_{0;0,1}\upsilon_{0;0,0}}\right)\varphi_0 = Q_{1;1}(x,y)\varphi_0. \quad (3.12)$$

Іншими словами, розв язок φ_n(x, y) при (3.7) для n=0 має вигляд (3.8) і (3.9).

Припустимо, використовуючи індукцію, що для n ∈ N φ_(n-1) (x, y) і φ(x, y) наш узагальнений власний вектор φ(x, y)= (φ_n (x, y))_(n=0)^∞ має вигляд (3.8) і (3.9) та доведемо, що φ_(n+1)(x, y) також можна з записати у вигляді (3.8) і (3.9).

Власний вектор $\varphi(x,y)$ задовольняю систему (3.7) двох рівнянь. Але ця система є перевизначена : вона складається з $2(n+1)$ скалярних рівнянь, з яких треба знайти тільки $n+2$ невідомі $\varphi_{n+1;0}, \varphi_{n+1;1}, \cdots, \varphi_{n+1;n+1}$, використовуючи значення вихідних даних. Попередні $n+1$ значення

$\varphi_{n;0}, \varphi_{n;1}, \dots, \varphi_{n;n}$ – це координати вектора $\varphi_n\,(x, y)$. Згідно з теоремами 2.4.4 і 2.3.5, зокрема (2.27), (2.28) і (2.45), (2.46) ((n+1) × (n+2))-матрицями c_n, і υ_n подієමо на $\varphi_{n+1} \in \mathrm{H}_n$, отримаємо:

$$v_n\varphi_{n+1}(x,y) = \begin{bmatrix} v_{n;0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_{n;1,0} & v_{n;1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_{n;2,0} & v_{n;2,1} & v_{n;2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n;n-1,0} & v_{n;n-1,1} & v_{n;n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ v_{n;n,0} & v_{n;n,1} & v_{n;n,2} & \dots & v_{n;n,n} & 0 \end{bmatrix} \varphi_{n+1}(x,y)$$

$$c_n\varphi_{n+1}(x,y) = \begin{bmatrix} c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;1,0} & c_{n;1,1} & c_{n;1,2} & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;2,0} & c_{n;2,1} & c_{n;2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n;n-1,0} & c_{n;n-1,1} & c_{n;n-1,2} & \dots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ c_{n;n,0} & c_{n;n,1} & c_{n;n,2} & \dots & c_{n;n,n} & c_{n;n,n+1} \end{bmatrix} \varphi_{n+1}(x,y)$$

(3.13)

де $\varphi_{n+1}(x, y) = \big(\varphi_{n+1;0}(x, y), \varphi_{n+1;1}(x, y), \dots, \varphi_{n+1;n+1}(x, y)\big)$.

Побудуємо схожу на (3.11) наступну комбінацію для матриці(3.13) : $\big((n+2) \times \,(n+2)\big)$-матриця

$$\Delta_{\,n\varphi_{n+1}(x,y)} = \begin{bmatrix} v_{n;0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{n;1,0} & c_{n;1,1} & c_{n;1,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n;n-1,0} & c_{n;n-1,1} & c_{n;n-1,2} & \dots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ c_{n;n,0} & c_{n;n,1} & c_{n;n,2} & \dots & c_{n;n,n} & c_{n;n,n+1} \end{bmatrix} \varphi_{n+1}(x,y)$$

(3.14)

Коли $\varphi_{n+1}(x, y) = \big(\varphi_{n+1;0}(x, y), \varphi_{n+1;1}(x, y), \dots, \varphi_{n+1;n+1}(x, y)\big)$.

В матриці (3.14) її елементи на головній діагоналі додатні (див. (2.28) і (2.46)).

Перепишемо рівності (3.7) таким чином :

$c_n\varphi_{n+1}(x,y) = x\varphi_n(x,y) - a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) - \ b_n\varphi_n(x,y),$

$v_n\varphi_{n+1}(x,y) = y\varphi_n(x,y) - u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) - \ v_n\varphi_n(x,y), \qquad$ n $\in \mathbb{N}$.
(3.15)

Ми бачимо, що перші $n+2$ скалярні рівняння (з 2(n+1) скалярні рівняння (3.15) мають вигляд

$\Delta_n\varphi_{n+1}(x,y) = \Big(xQ_{n;0}(x,y) - \Big(u_{n-1}Q_{n-1}(x,y) - \big(\omega_nQ_n(x,y)\big)_{n;0},$

$yQ_{n;0}(x,y) - \big(a_{n-1}Q_{n-1}(x,y)\big)_{n;0} - \ \big(b_nQ_n(x,y)\big)_{n;0}, \dots, yQ_{n;n}\,(x,y) -$

$\big(a_{n-1}Q_{n-1}(x,y)\big)_{n;n} - \ \big(b_nQ_n(x,y)\big)_{n;n}\Big)\Big)\ \varphi_0.$

(3.16)

Конструкція матриці Δ_n і форма вектора у правому куті в сенсі (3.16) і (3.8), (3.9) показує, що

$\varphi_{n+1;0}(x,y) = \ Q_{n+1;0}(x,y)\varphi_0 = \ \frac{1}{a_{n;0,0}}\Big(xQ_{n;0}(x,y) -$

$\big(u_{n-1}Q_{n-1}(x,y)\big)_{n;0}\Big) - \big(\omega_nQ_n(x,y)\big)_{n;0})\varphi_0 = \ \frac{1}{a_{n;0,0}}\Big(x\Big(l_{n;0}x^n +$

$q_{n;0}(x,y)\Big)\Big) - \big(u_{n-1}Q_{n-1}(x,y)\big)_{n;0} - \ \big(\omega_nQ_n(x,y)\big)\varphi_{0,}$

(3.17)

тобто головна частина у правому куті (3.17) дорівнює $\frac{l_{n;0}}{a_{n0;0,}}x^{n+1}y^0$, тому вона має вигляд (3.9).

Аналогічні розрахунки дають той же ефект для $\varphi_{n+1;1}(x,y), \dots, \varphi_{n+1;n+1}(x,y)$. Потрібно взяти до уваги наступні діагональні елементи $v_{n;0,0}, c_{n;0,1}, c_{n;1,2}, \dots, c_{n;n,n+1}$ з матриці Δ_n, які є додатними в зв'язку з (2.46) і (2.28). Це завершує індукцію і закінчує доведення.

Не стверджується, що розв'язок перевизначеної системи (3.7) існує для будь-яких початкових даних $\varphi_0 \in \mathbb{R}$: доводиться тільки те, що узагальнений власний вектор з $(l_{fin})'$ операторів A і B є розв'язком (3.7) і має вигляд (3.8) і (3.9).

3.3. Відновлення міри за заданими блочними матрицями

Розглянемо $Q_n(x,y)$ з фіксованими x і y як лінійний оператор, який діє з H_0 в H_n, тобто $\mathrm{H}_0 \ni \varphi_0 \to Q_n(x,y)\varphi_0 \in \mathrm{H}_n$. Ми також розуміємо $Q_n(x,y)$ як операторнозначний поліном від $x,y \in \mathbb{R}^2$; отже, спряжений оператор має вигляд $Q_n^*(x,y) = \left(Q_n(x,y)\right)^*: \mathrm{H}_n \to \mathrm{H}_0$. Використовуючи поліноми $Q_n(x,y)$, ми побудуємо таке представлення для $\Phi_{j,k}(x,y)$.

Лема 3.3.1. *Оператор* $\Phi_{j,k}(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *має такий вигляд*

$$\Phi_{j,k}(x,y)=Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)Q_k^*(x,y) : \mathrm{H}_n \to \mathrm{H}_0, j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.18}$$

де $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$ *скаляр.*

Доведення. Для фіксованого $k \in \mathbb{N}_0$ вектор $\varphi = \varphi(x,y) = \left(\varphi_j(x,y)\right)_{j=0}^{\infty}$, де

$$\varphi_j(x,y) = \Phi_{j,k}(x,y)= \pi_j\Phi(x,y)\pi_k \in \mathrm{H}_j, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.19}$$

є узагальненим розв'язком, в $(l_{fin})'$рівнянь,

$$J_{A\varphi}(x,y) = x\varphi(x,y), \qquad J_{B\varphi}(x,y) = y\varphi(x,y)$$

оскільки $\Phi(x,y)$ – це проектор на узагальнені власні вектори операторів A і B з відповідними узагальненими власними числами x та y. Отже, $\varphi = \varphi(x,y) \in l_2(p^{-1})$ існує, як звичайний розв'язок рівнянь $J_{A\varphi} = x\varphi, J_{B\varphi} = y\varphi$ з початковою умовою $\varphi_0 = \pi_{j0}\Phi(x,y)\pi_k \in \mathrm{H}_0$.

Використаємо лему 3.2.1 і у зв'язку з (3.8) ми отримуємо

$$\Phi_{j,k}(x,y)=Q_j(x,y)(\Phi_{0,k}(x,y)), \quad j \in \mathbb{N}_0. \tag{3.20}$$

Оператор $\Phi(x,y) : l_2(p) \to \in l_2(p^{-1})$ формально самоспряжений на l_2 і є похідною розкладу одиниці оператора A на l_2 відносно спектральної міри. Отже, відповідно до (3.18) ми отримуємо

$$\left(\Phi_{j,k}(x,y)\right)^* = (\pi_j \Phi(x,y)\pi_k)^* = \pi_k \Phi(x,y)\pi_j = \Phi_{j,k}(x,y), j,k \in \mathbb{N}_{0.}$$
(3.21)

Для фіксованого $j \in \mathbb{N}_0$ з (3.21) і попереднього розглянутого матеріалу, випливає, що вектор

$$\varphi = \varphi(x,y) = \left(\varphi_k(x,y)\right)_{k=0}^{\infty}, \qquad \varphi_k(x,y) = \Phi_{j,k}(x,y) = \left(\Phi_{j,k}(x,y)\right)^*$$

це звичайний розв'язок рівнянь $J_{A\varphi} = x\varphi$ і $J_{B\varphi} = y\varphi$ з початковою умовою

$$\varphi_0 = \Phi_{0,k}(x,y) = \left(\Phi_{j,0}(x,y)\right)^*.$$

Знову використаємо лему 3.2.1 ми отримаємо представлення типу (3.20),

$$\Phi_{j,k}(x,y)=Q_k(x,y)(\Phi_{0,j}(x,y)), \quad k \in \mathbb{N}_0. \qquad (3.22)$$

Беручи до уваги (3.21) і (3.22) ми отримаємо

$$\Phi_{0,k}(x,y)=\left(\Phi_{k,0}(x,y)\right)^*=(Q_k(x,y)(\Phi_{0,0}(x,y))^* =$$
$$\Phi_{0,0}(x,y)\left(Q_k(x,y)\right)^*, k \in \mathbb{N}_0$$

(тут ми використовуємо $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$, ця нерівність випливає з (3.4) і (3.5)).

Підставляючи (3.23) в (3.20) ми отримуємо (3.18).

Тепер можна переписати рівність Парсеваля (3.6) в більш конкретній формі. Нарешті, ми підставимо вираз (3.18) для $\Phi_{j,k}(x,y)$ в (3.6) і отримаємо, що

$$(f,g)_{l_2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\Phi_{j,k}(x,y) f_{k,} \, g_j\right)_{l_2} d\sigma\,(x,y)$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y) Q_k^*(x,y) f_{k,} \, g_j\right)_{l_2} d\sigma\,(x,y)$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(Q_k^*(x,y) f_k, Q_j^*(x,y) g_j\right)_{l_2} d\sigma\,(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(x,y) f_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} Q_j^*(x,y) g_j\right) d\sigma\,(x,y),$$

$$dp(x,y) = \Phi_{0,0}(x,y)\, d\sigma\,(x,y), \quad \forall f,g \in l_{fin}. \qquad (3.24)$$

Позначимо перетворення Фур’є Λ для комутуючих самоспряжених операторів A і B в просторі l_2

$l_2 \supset l_{fin} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \rightarrow f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_n^*(x,y) f_n \in$
$L_2(\mathbb{R}^2, dp(x,y))$. (3.25)

Отже, (3.24) дає рівність Парсеваля у фінальній формі,

$$(f,g)_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) g(x,y) dp(x,y),, \quad \forall f,g \in l_{fin}. \qquad (3.26)$$

Продовжимо (3.26) за неперервністю $\forall f,g \in l_2$. Ортогональність поліномів $Q_n^*(x,y)$ з (3.25) і (3.26). А саме, достатньо лише взяти $f = (0,\ldots,0,f_k,0,\ldots), f_k \in \mathrm{H}_k, g = \left(0,\ldots,0,g_j,0,\ldots\right), g_j \in \mathrm{H}_j$ в (3.25) і (3.26). Тоді

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(Q_k^*(x,y) f_k\right)\left(Q_j^*(x,y) g_j\right) dp\,(x,y) = \delta_{j,k}\left(f_j,g_j\right)_{\mathrm{H}_j}, \ \forall k,j \in \mathrm{H}_0$$

(3.27)

Використаємо представлення (3.8) для цих многочленів, ми можемо переписати рівність (3.27) в зазвичай класичній скалярній формі. Щоб зробити це, зауважимо, що в цілому $Q_0^*(x,y) = Q_0(x,y)$ і для $n \in \mathbb{N}$ відповідно до (3.8)

$Q_n(x,y) = \Big(Q_{n;0}(x,y), Q_{n;1}(x,y), \dots,, Q_{n;n}(x,y)\Big)$: $\mathrm{H}_0 \to \mathrm{H}_n$. Отже, для спряженого оператора $Q_n^*(x,y) : \mathrm{H}_n \to \mathrm{H}_0$ ми маємо

$$(Q_n(x,y)q, p)_{\mathrm{H}_n} =$$

$$\Big(\big(Q_{n;0}(x,y)q, Q_{n;1}(x,y)q, \dots,, Q_{n;n}(x,y)q\big), \big(p_{0,}p_1, \dots, p_n\big)\Big)_{\mathrm{H}_n}$$

$$= Q_{n;0}(x,y)qp_0 + Q_{n;1}(x,y)qp_1 + \ldots + Q_{n;n}(x,y)qp_n$$

$$= q\big(Q_{n;0}(x,y)p_0 + Q_{n;1}(x,y)p_1 + \cdots + Q_{n;n}(x,y)p_n\big)$$

$$= (q, Q_n^*(x,y)p)_{\mathrm{H}_0},$$

де $Q_n^*(x,y)p = Q_{n;0}(x,y)p_0 + Q_{n;1}(x,y)p_1 + \cdots + Q_{n;n}(x,y)p_n$, $\forall q, j \in \mathrm{H}_0$ і $p = (p_0, p_1, \dots, p_n\ ) \in \mathrm{H}_n$.

З останньої рівності для $n \in \mathbb{N}$ і $f_n = \big(f_{n,0}, f_{n,1}, \dots, f_{n,n}\big) \in \mathrm{H}_n$, ми отримуємо $Q_n^*(x,y)f_n = Q_{n;0}(x,y)f_{n;0} + Q_{n;1}(x,y)f_{n;1} + \cdots + Q_{n;n}(x,y)f_{n;n}$, $Q_0^*(x,y) = 1.$ (3.28)

Тому (3.27) має вигляд $\forall f_{k,0}, f_{k,1}, \dots, f_{k,k}$, $g_{j,0}, g_{j,1}, \dots, g_{j,j} \in \mathbb{C}, j, k \in \mathbb{N}_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{\alpha=0}^{k} Q_{k;\alpha}(x,y) f_{k;\alpha}\right) \left(\sum_{\beta=0}^{j} Q_{j;\beta}(x,y) f_{j;\beta}\right) dp\ (x,y) =$$

$$\delta_{j,k} \sum_{\alpha=0}^{j} f_{j;\alpha} g_{j;\alpha}.$$

Ця рівність еквівалентна співвідношенню ортогональності в звичайній класичній формі :

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q_{k;\beta}^*(x,y)\, Q_{j;\alpha}\ dp\ (x,y) = \delta_{j,k}\delta_{\alpha,\beta} \quad \Big(Q_{0;0} = Q_0(x,y)\Big),$$

(3.29)

$\forall j, k \in \mathbb{N}_0, \forall \alpha = 0, 1, \dots, \beta =, \ , \dots, k.$

Відзначимо, що у зв'язку з (3.28) перетворення Фур'є (3.25) може бути переписано

$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \quad \sum_{\alpha=0}^{n} Q_{n;\alpha}(x,y)\, f_{n;\alpha}, \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2. \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$ (3.30)

Використавши викладені результати цього розділу, ми можемо сформулювати таку спектральну теорему для наших обмежених, комутуючих симетричних операторів *A* і *B*.

Теорема 3.3.2 *Розглянемо простір (2.6)*

$l_2 = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots, H_n = \mathbb{C}^{n+1}, n \in \mathbb{N}_0,$ (3.31)

і лінійні оператори A і B, які визначаються на скінчених векторах l_{fin} *блочними тридіагональними матрицями типу Якобі* J_A *і* J_B *у вигляді (2.44) і (2.26) за допомогою виразу в (2.47) і (2.29). Ми вважаємо, що всі коефіцієнти* a_n, b_n, c_n *і* u_n, v_n, w_n , $n \in \mathbb{N}_0$, *рівномірно обмежені, деяки елементи цих матриць дорівнюють нулю або додатні відповідно до (2.45), (2.46) і (2.27), (2.28) і замикання A і B за неперервністю обмежені комутуючі оператори самоспряжені на цьому просторі.*

Розклад за узагальненими власними векторами операторів A і B має наступну форму. Згідно леми 3.2.1 ми представляємо, за допомогою φ_0 $\mathbb{R}$, *розв'язок* $\varphi(x\ y) = \left(\varphi_n(x,y)\right)_{n=0}^{\infty}, \varphi_n(x,y) \in H_n$ *рівнянь (3.7) (який існує завдяки проекційній спектральній теоремі) для* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi_n(x,y) = Q_n(x,y)\varphi_0 = \Big(Q_{n;0}(x,y), Q_{n;1}(x,y), \dots, Q_{n;n}(x,y)\Big)\,\varphi_0,$$

де $Q_{n;\alpha}(x,y), \alpha = 0, 1, \dots, n$ *поліноми x і y. Тоді перетворення Фур є має вигляд*

$$l_2\mu \supset l_{fin} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \to f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^*(x,y) f_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{n} Q_{n;\alpha}(x,y)\, f_{n;\alpha} \in L_2\left(\mathbb{R}^2, dp(x,y)\right). \qquad (3.32)$$

Тут $Q_n^*(x,y) : H_n \to H_0$ спряжений до оператора $Q_{n;\alpha}(x,y) : H_0 \to H_n$, $dp(x,y)$ ймовірнісна спектральна міра A і B.

Рівність Парсеваля має такий вигляд : $\forall f, g \in l_{fin}$

$$(f,g)_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)g(x,y)\,dp(x,y),$$

$$(J_A f, g)_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} xf(x,y)g(x,y)\,dp(x,y), \qquad (3.33)$$

$$(J_B f, g)_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} yf(x,y)g(x,y)\,dp(x,y)$$

Оператори (3.32)і (3.33)розширені за неперервністю на $\forall \mathrm{f}, \mathrm{g}$ $\in l_2$ утворюють унітарний оператор (3.32), який відображає l_2 на весь $L_2(\mathbb{R}^2, dp(x,y)$.

Поліноми $Q_{n;\alpha}(x,y), n \in \mathbb{N}, \alpha = 0, 1, \ldots, n,$ *і* $Q_{00}(x,y) = 1,$ *утворюють ортонормовану систему в* $L_2(\mathbb{R}^2, dp(x,y)$ *в сенсі (3.29).*

Матриці

$$J_A = \left(\tau_{j,k}\right)_{j,k=0}^{\infty}, \tau_{j,k} = \left(\tau_{j,k;\alpha,\beta}\right)_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$$

$$J_B = \left(\theta_{j,k}\right)_{j,k=0}^{\infty}, \theta_{j,k} =, \left(\theta_{j,k;\alpha,\beta}\right)_{\alpha,\beta=0}^{j,k},$$

відновлюються за формулами :

$$\tau_{j,k;\alpha,\beta} = \left(J_A \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha}\right)_{l_2} = \iint_{\mathbb{R}^2} xP_{k,\beta}(x,y)P_{j;\alpha}(x,y)dp(x,y),$$

$$\theta_{j,k;\alpha,\beta} = \left(J_B \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha}\right)_{l_2} = \iint_{\mathbb{R}^2} yP_{k,\beta}(x,y)P_{j;\alpha}(x,y)dp(x,y), \qquad (3.34)$$

тут перепозначено $b_n = \tau_{j,j}, c_n = \tau_{j,j+1}, a_n = \tau_{j+1,j}, і\ \omega_n = \theta_{j,j}, v_n = \theta_{j,j+1},$

$u_n = \theta_{j+1,j}, j \in \mathbb{N}_0.$

Доведення. Необхідно тільки показати, що ці поліноми ортогональні

$Q_{n;\alpha}(x,y), n \in \mathbb{N}, \alpha = 0, 1, \ldots, n$ і $Q_{0;0}(x, y = 1)$ утворюють тотальну множину в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, dp(x,y)$. З цієї причини ми помітимо спочатку, що через компактність носія міри $dp(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$, елементи $x^j y^k, j, k \in \mathbb{N}_0$, утворюють тотальну множину в $L_2(\mathbb{R}^2, dp(x,y)$.

Припустимо протилежне, тобто, що наша система поліномів не є тотальною.

Тоді існує ненульова , функція $h(x,y) \in L_2(\mathbb{R}^2, dp(x,y)$, що є ортогональною до всіх цих поліномів і, отже, відповідно до (3.9) для всіх $x^j y^k, j,k \in \mathbb{N}_0$. Отже $h(x,y) = 0$.

Остання теорема розв'язує пряму спектральну задачу для обмежених симетричних комутуючих операторів *A* і *B,* які зображаються в просторі l_2матрицею J_A i J_B у вигляді (2.44) і (2.26).

Обернена задача полягає в побудові міри $dp(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$ з компактним носієм обмежених симетричних комутуючих матриць J_A і J_B у вигляді (2.44) і (2.26), які мають свою спектральну міру, що дорівнює $dp(x,y)$. *Ця побудова ведеться відповідно до Теорем 2.4.4 і 2.3.5, з використанням ортогоналізації Шмідта для системи (2.2) для матриць* J_A i J_B *у вигляді (2.26) і (2.44), які побудовані з* $dp(x,y)$*, спектральна міра відповідних, обмежених симетричних, комутуючих операторів а і В є збіжною з початковою мірою.*

Доведення. Це твердження вірне, оскільки система ортогональних поліномів, пов'язаних з *A* і *B,* $Q_{n,\alpha}(x,y)\alpha = 0,1,\dots,n, n \in \mathbb{N}_0$, ортонормована в $L_2(\mathbb{R}^2, dp(x,y)$ і, відповідно до леми 3.2.1, побудовані на $y^j x^k$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, таким же чином, що і система (2.3) побудована на $x^j y^k, j,k \in \mathbb{N}_0$. Отже,

$Q_0(x,y) = P_0(x,y) = 1, Q_{n,\alpha}(x,y) = P_{n,\alpha}(x,y), \alpha = 0,1,\dots,n, \forall n \in \mathbb{N}.$ (3.35)

Оскільки система поліномів утворює тотальну множину в $L_2(\mathbb{R}^2, dp(x,y)$, то (3.35) показує, що спектральна міра побудована за оператором і задана спочатку збігається.

Відзначимо, що вирази (2.12) і (2.30) (як це було в класичній теорії матриць Якобі) відновлюють початкові матриці (2.44) і (2.26) за спектральною мірою $dp(x, y)$ операторів, породжених J_A i J_B на l_2.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов /Н.И.Ахиезер // М.Гос.физ.-мат. лит. 1961. 312 с.

2. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н.И.Ахиезер// Москва : Физматгиз. 1961. 310 с.

3. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка / Ю.М.Березанский // Тр.Моск.М.Об-ва. 1956. с.203-268

4. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М.Березанский // Киев: Наук. думка. 1965. 450 с.

5. Березанский Ю.М. Прямая и обратная спектральные задачи для якобиева поля / Ю.М.Березанский // Алгебра и анализ. 1997. 9, №6 с.38 61.

6. Березанский Ю.М. Обобщенная проблема моментов, связанная с корреляционными мерами / Ю.М.Березанский // Функ. анализ и прилож. 2003. 37 № 4 с.86 91.

7. Березанский Ю.М. Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений / Ю.М.Березанский, М.И.Гехтман, М.Е.Шмойш // Киев: Укр.мат.журнал. 1986. 38 № 1. с.84-89

8. Березанский Ю.М. Спектральные методы в бесконечном анализе / Ю.М.Березанский, Ю.Г. Кондратьев // Киев : Наук.думка. 1988. 800с.

9. Березанский Ю.М. Интегрирование некоторых дифференциально-разностных нелинейных уравнений с помощью спектральной теории блочных якобиевых нормальных матриц. / Ю.М.Березанский, А.А.Мохонько // Функ.анализ и прилож. 2008. 42, № 1. С.1 21.

10. Березанский Ю.М. Функциональный анализ: курс лекций. / Ю.М.Березанский, Г.Ф.Ус, З.Г.Шефтель // Київ :Вища школа, 1990. 600 с.

11. Гехтман М.И. Спектральная теория ортогональных полиномов нескольких переменных / М.И.Гехтман, А.А.Калюжный // Укр.мат.журнал, Ин-т математики АН УССР, Киев. 1991 43 № 10. С. 1437 1440

12. Деревягин М.С. О сходимости аппроксимаций Паде обобщенных Неванлиновский функций / М.С.Деревягин, В.А.Деркач // Труды Московского мат.общества. 2007. 68 с. 135-184

13. Дубровин Б.А. Тэта-функции и нелинейные уравнения / Б.А.Дубровин// УМН. 1981. 36 № 2(218), с.11-80.

14. Дудкін М.Є. Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів / Дуд кін М.Є., Козак В.І.// Наукові вісті НТУУ «КПІ». 2015 № 4, с.41 46.

15. Дюкарев Ю.М. О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якобь / Ю.М.Дюкарев// Мат.сборник. 2006. № 8. с.73 100.

16. Ескин Г.И. Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов / Г.И.Ескин // ДАН СССР. 1960. 133, № 3. с.540 543.

17. Зархина Р.Б. О двумерной проблеме моментов / Р.Б.Зархина // ДАН СССР. 1959. 124, № 4. с. 743 746.

18. Козак В.І. Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів/ В.І.Козак // Наукові Вісті НТУУ «КПІ». 2013. 170 №4. с.73 76.

19. Костюченко А.Г. Многомерная проблема моментов /А.Г.Костюченко // ДАН СССР. 1960. 131, № 6. с. 1249 1252.

20. Кошмаренко В.Д. Методи оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів / В.Д.Кошмаренко, М.Є.Дудкін // Праці Інституту математики НАН України, Київ. 2013. 96. 320 с.

21. Крейн М.Г. Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов / М.Г.Крейн // ДАН СССР. 1949. 69 № 2. с. 125-128.

22. Крейн М.Г. Основные положения теории представлений эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) / М.Г.Крейн // Укр.мат.журн. 1949. № 2. с 3-66.

23. Сеге Г. Ортогональные полиномы / Г.Сеге // М:Гос.изд.физ.-мат.лит. 1962. 500с.

24. Симонов К.К. Ортогональные матричные полиномы Лорана / К.К.Симонов // Мат.заметки. 2006. 79, № 2. с. 316 320.

25. Симонов К.К. Ортогональные матричные полиномы Лорана на вещественной оси / К.К.Симонов // Украинский Математический Вестник. 2006. 3, № 2. с. 275-299.

26. Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным / П.К.Суетин // М: Наука Гл.ред.физ.-мат. лит-ры. 1988. 384 с.